BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$, et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. *a.* Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

   b. Vérifier que ce plan est le plan P.

2. *a.* Montrer que le triangle ABC est rectangle.

   b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

   c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

   d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés
$$S = \left\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\right\}.$$
   a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.

   b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

   c. Déterminer la distance de G au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :
$$\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5.$$
   Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice 2 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit R la rotation du plan de centre Ω, d'affixe ω et d'angle de mesure θ. L'image par R d'un point du plan est donc définie de la manière suivante :

- $R(\Omega)=\Omega$
- pour tout point M du plan, distinct de Ω, l'image M' de M est définie par $\Omega M'=\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta\ [2\pi]$.

On rappelle que, pour des points A et B d'affixes respectives a et b, $AB=|b-a|$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\arg(b-a)\ [2\pi]$.

Question : Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M' par la rotation R, sont liées par la relation

$$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega).$$

2. On considère les points I et B d'affixes respectives $z_I=1+i$ et $z_B=2+2i$. Soit R la rotation de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.
   a. Donner l'écriture complexe de R.
   b. Soit A l'image de I par R. Calculer l'affixe z_A de A.
   c. Montrer que O, A et B sont sur un même cercle de centre I. En déduire que OAB est un triangle rectangle en A. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.
   d. En déduire une mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$.

3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{IO}$. On pose $A'=T(A)$.
   a. Calculer l'affixe $z_{A'}$ de A'.
   b. Quelle est la nature du quadrilatère $OIAA'$?
   c. Montrer que $-\frac{\pi}{12}$ est un argument de $z_{A'}$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

   b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,
   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=(\ln(x+3))^2$.

   a. Justifier la dérivabilité sur $[0,+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

   b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?